Algebraische Structuren April 2010

H. Waalkens

university of groningen

Exam Problem Sheet

The exam consists of 6 problems. You can achieve 62 points in total.
The number of points for each problem is marked in brackets (you get 6 points for free).
You can find the translation of the problems into Dutch below.
You may answer the questions in English or Dutch.

1. [**3+3 Points**] Let R be a ring, and $a \in R$. Define

$$S = \{x \in R : ax = xa\}.$$

   (a) Prove that S is a subring of R.

   (b) Prove: $S^* = R^* \cap S$.

2. [**3+2+4 Points**] Let V be a set, R a ring, and R^V the set of functions from V to R, i.e. $R^V = \{f : V \to R\}$.

   (a) Show that R^V is a ring when addition and multiplication are defined according to

$$\begin{aligned}(f+g)(v) &= f(v) + g(v),\\ (fg)(v) &= f(v) \cdot g(v)\end{aligned}$$

   for $f, g : V \to R$ and $v \in R$.

   (b) Note that for $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, with $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, the ring R^V coincides with the product of rings $R \times R \times \cdots \times R$ (n times). Show that for $n \geq 2$ and $R \neq \{0\}$, R^V always has zero divisors.

   (c) Let $V = [0,1]$ and $R = \mathbb{R}$, and consider

$$C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ is continuous}\}.$$

   Show that $C([0,1])$ forms a subring of R^V, and $C([0,1])$ has zero divisors.

3. [**3+4+4 Points**] Let

$$R = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) : c = 0\}$$

   and

$$I = \{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) : b \in \mathbb{R}\}.$$

   Prove the following statements:

   (a) R is a subring of $M(2,\mathbb{R})$;

   (b) I is an ideal of R, and $R/I \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

   (c) R is not commutative, but R/I is commutative.

4. **[3+4+7 Points]**

   (a) What does the Chinese remainder theorem for rings say?

   (b) Let R be a unitary ring, and let I_1, I_2, I_3 be ideals of R. Show that if

$$I_1 + I_3 = R \text{ and } I_2 + I_3 = R$$

   then

$$(I_1 \cdot I_2) + I_3 = R\,.$$

   (c) Let R be a commutative ring with 1, and let $I_1, I_2, ..., I_t$ ($t \in \mathbb{Z}_{>0}$) be ideals of R which are mutually prime, i.e. $I_i + I_j = R$ for $1 \leq i < j \leq t$. Prove that

$$R/\left(\prod_{i=1}^{t} I_i\right) \cong \prod_{i=1}^{t} (R/I_i)\,.$$

   (Hint: prove that $(I_1 \cdot I_2 \cdot ... \cdot I_{t-1}) + I_t = R$ as in (b), and use induction by t. Use the Chinese remainder theorem for rings.)

5. **[3 + 5 Points]**

   (a) How are prime ideals and maximal ideals defined?

   (b) Let R be a domain. Prove: the ideal generated by X and Y in $R[X,Y]$ is equal to

$$\{f \in R[X,Y] : f(0,0) = 0\}$$

   (i.e. $(X,Y) = \{f \in R[X,Y] : f(0,0) = 0\}$) and this is a prime ideal of $R[X,Y]$. Is this ideal also maximal?

6. **[3 + 5 Points]**

   (a) Give the definition of a unique factorization domain.

   (b) Determine all the irreducible polynomials $f \in \mathbb{F}_2[X]$ with $deg(f) \leq 3$.

Dutch Translation

1. **[3+3 Punten]** Laat R een ring zijn, en $a \in R$. Definieer

$$S = \{x \in R : ax = xa\}\,.$$

   (a) Bewijs dat S een deelring van R is.

   (b) Bewijs: $S^* = R^* \cap S$.

2. **[3+2+4 Punten]** Zij V een verzameling, R een ring, en R^V de verzameling van afbeeldingen van V naar R, d.w.z. $R^V = \{f : V \to R\}$.

   (a) Bewijs dat R^V met de optelling and vermenigvuldiging

$$\begin{aligned} (f+g)(v) &= f(v) + g(v)\,, \\ (fg)(v) &= f(v) \cdot g(v) \end{aligned}$$

   voor $f, g : V \to R$ en $v \in R$, een ring vormt.

   (b) Geldt $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, met $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, dan zien we dat R^V dezelfde ring is als $R \times R \times \cdots \times R$ (n keer). Bewijs dat voor $n \geq 2$ en $R \neq \{0\}$, R^V steeds nuldelers heeft.

(c) Zij $V = [0,1]$ en $R = \mathbb{R}$, en beschouw

$$C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \, : \, f \text{ is continu}\}.$$

Bewijs dat $C([0,1])$ een deelring van R^V, en deze deelring heeft nog steeds nuldelers.

3. **[3+4+4 Punten]** Laat

$$R = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) : c = 0\}$$

en

$$I = \{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) : b \in \mathbb{R}\}.$$

Bewijs de volgende uitspraken:

(a) R is een deelring van $M(2,\mathbb{R})$;

(b) I is een ideaal van R, en $R/I \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

(c) R is niet commutatief maar R/I wel.

4. **[3+4+7 Punten]**

(a) Wat zegt de Chinese reststelling voor ringen?

(b) Laat R een ring met 1 zijn, en I_1, I_2, I_3 idealen van R. Bewijs dat: Als

$$I_1 + I_3 = R \text{ en } I_2 + I_3 = R,$$

dan

$$(I_1 \cdot I_2) + I_3 = R.$$

(c) Zij R een commutatieve ring met 1, en laten $I_1, I_2, ..., I_t$ ($t \in \mathbb{Z}_{>0}$) idealen van R zijn die paarsgewijs onderlig ondeelbar zijn, d.w.z. $I_i + I_j = R$ voor $1 \leq i < j \leq t$. Bewijs:

$$R/\left(\prod_{i=1}^{t} I_i\right) \cong \prod_{i=1}^{t} (R/I_i).$$

(Aanwijzing: bewijs $(I_1 \cdot I_2 \cdot ... \cdot I_{t-1}) + I_t = R$ als in (b), en pas inductie naar t toe. Maak gebruik van de Chinese reststelling voor ringen.)

5. **[3 + 5 Punten]**

(a) Hoe zijn priem idealen en maximaal idealen gedefinieerd?

(b) Laat R een domein zijn. Bewijs: het door X en Y voortgebrachte ideaal van $R[X,Y]$ is gelijk aan

$$\{f \in R[X,Y] : f(0,0) = 0\}$$

(d.w.z. $(X,Y) = \{f \in R[X,Y] : f(0,0) = 0\}$) en dit is een priemideaal van $R[X,Y]$. Is dit ideaal ook maximaal?

6. **[3 + 5 Punten]**

(a) Geef de definitie van een ontbindingsdomein.

(b) Bepaal alle irreducibele polynomen $f \in \mathbb{F}_2[X]$ met $graad(f) \leq 3$.

①

Tentamen Algebraische Structuren 6 apr '10

1a $1 \in R$ (gegeven R ring)

$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ ~~das~~ $\forall a \in R$ dus $1 \in S$ ✓

* $\forall a, b \in S$: $ax = xa$ okay if S $x \in R$

$bx = xb$ defined in terms of fixed $x \in R$.

dan $ax - bx = xa - xb$ (distributieve wet)

$= (a-b)x = x(a-b)$

dus $a-b \in S$

* $\forall a, b \in S$

$abx \overset{b \in S}{=} axb \overset{a \in S}{=} xab$

$ab \in S$ 3/3

Dus S is een deelring

b R^* alle eenheden uit R dus alle $a, b \in R$ met $ab = ba = 1$

'⊆' Stel $c \in S^*$ dan $c \in S$ met de eigenschap $cd = dc = 1$ en $d \in S$ (**), aangezien $c \in S$ geldt ook $c \in R$ ($S \subset R$) en zo ook voor d, dus ~~...~~ ook $c, d \in R^*$ en dus $c \in R^*$ dus $c \in R^* \cap S$ ✓ $\forall c \in S^*$

'⊇' Stel $f \in R^* \cap S \rightarrow \exists\ e \in R^*$ zdd $ef = fe = 1$ ($f \in R^*$), $f \in S$

Neem nu $e \in R$ hiervoor moet gelden

(*) ~~...~~

see sheet 3 Dus ook $e \in S$.

~~aangezien~~ $e, f \in S$ en $e, f \in R^*$ ~~geldt~~

~~ook~~ $ef = fe = 1$ dus $e, f \in S^*$ ~~...~~ $\forall f \in R^* \cap S$ 2/3

□ 5/6

3a $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) : c = 0 \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) \right\}$

* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ ($a = d = 1$ $b = 0$)

$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

dus $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = 1_{M(2,\mathbb{R})} \in R \quad \forall \begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R})$

$*$ $\forall \begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}e&f\\0&h\end{pmatrix} \in R$

$\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}e&f\\0&h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-e&b-f\\0&d-h\end{pmatrix} \in R$

$*$ $\forall \begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}e&f\\0&h\end{pmatrix} \in R$

$\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e&f\\0&h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ae&af+bh\\0&dh\end{pmatrix} \in R$

dus R is een deelring van $M(2,\mathbb{R})$ 3/3

b $*$ $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \in I \quad (b=0)$

$*$ $\forall \begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&c\\0&0\end{pmatrix} \in I$

$\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&c\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&b-c\\0&0\end{pmatrix} \in I$

$*$ $\forall \begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix} \in I$ en $\begin{pmatrix}g&e\\0&t\end{pmatrix} \in R$

$\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g&e\\0&t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&bt\\0&0\end{pmatrix} \in I$

$\begin{pmatrix}g&e\\0&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&gb\\0&0\end{pmatrix} \in I$

dus I is een ideaal van R ✓

~~$\ker(f) = \{\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix} \mid (a,R), a \in \mathbb{R}\} = I$~~

$R \to R/I \qquad \begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}$

$\varphi: R/I \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

c $*$ $\forall \begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}e&f\\0&h\end{pmatrix} \in R$

$\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e&f\\0&h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ae&af+bh\\0&dh\end{pmatrix}$ $\neq \forall a,b,d,e,f,g,h \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix}e&f\\0&h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ea&eb+fd\\0&hd\end{pmatrix}$

dus R niet commutatief (give an example!)

~~R/I~~ $R \to R/I \qquad a \to a+I$

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ ~~...~~ $+I$

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \in R$ be more precise!

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & 0 \\ 0 & dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea & 0 \\ 0 & hd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

$a, b, e, h \in \mathbb{R}$

dus R/I is commutatief 3/4

b $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = (a, d)$

- $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (1, 1)$
- $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix}\right) = (a+c, b+d)$
  $= (a, d) + (c, b) = \varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right)$
- $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & db \end{pmatrix}\right) = (ac, db)$
  $= (a, d) \cdot (c, b) = \varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) \cdot \varphi\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right)$

Dus φ is een ringhomomorfisme

$\mathrm{Ker}(\varphi(R)) = \mathrm{Ker}\left(\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right)\right) = \mathrm{Ker}((a, d))$
$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R} \right\} = I$

Als φ surjectief, dan mbv de eerste isomorfiestelling geldt: $R/I \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\forall\, (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ \exists \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in R$ met
$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = (a, b)$ dus φ surjectief 4/4

$\square$ 10/11

4a ~~$R/(I \cdot J) \cong (R/I) \times (R/J)$~~

Als I, J idealen van R commutatieve ~~commutatieve~~ ring met 1
en $I + J = R$

~~b $I \cap J = R$~~ ~~geldt~~ dan $R/(I \cdot J) \cong (R/I) \cdot (R/J)$

and $I \cdot J = I \cap J$

5a Priemideaal is een ideaal $pR \subset R$ met 1/10
$p \notin R^*$
als $p = ab$ dan $a = \pm 1$ of $b = \pm 1$

B Maximaal ideaal
Een ideaal $I \subset R$ is maximaal als 1.5/3
$I \neq R$
en $\forall$ idealen J met
$I \subseteq J \subseteq R$ geldt $J = I$ of $J = R$

b $R[x,y] = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} a_{ij} x^i y^j$

$I = \{ f \in R[x,y] : f(0,0) = 0 \}$

$g(0,0) = a_{00}$
$I = \{ f \in R[x,y] : a_{00} = 0 \}$

* $f = 0 \in I$
* $\forall$ $f \in I$ en $g \in I$:

$f = \{ \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} a_{ij} x^i y^j \; ; \; a_{00} = 0 \}$

$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{m} a_{ij} x^i y^j + \sum_{i=1}^{m} a_{i0} x^i \quad \in I$

$g = \sum_{e=1}^{s} \sum_{f=0}^{t} a_{fe} x^f y^e + \sum_{f=1}^{t} a_{f0} x^f \quad \in I$

$f - g = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{m} a_{ij} x^i y^j \; \sum_{i=1}^{m} a_{i0} x^i - \sum_{e=1}^{s} \sum_{f=0}^{t} a_{fe} x^f y^e - \sum_{f=1}^{t} a_{f0} x^f$

$(f-g)(0,0) = 0 - 0 = 0 \in I$

* ~~$(fg)(0,0) = 0 \cdot 0 = 0 \in I$~~
~~$(gf)(0,0)$~~ $f \in I$ en $g \in R[x,y]$
$(fg)(0,0) = f(0,0)\, g(0,0) = 0 \cdot g(0,0) = 0 \quad \in I$
$(gf)(0,0) = g(0,0)\, f(0,0) = g(0,0) \cdot 0 = 0 \quad \in I$

2

Tentamen Algebraische Structuren 6 apr '10

5b dus I is een ideaal

~~Stel~~ Te bew $I = \{Xf + Yg, \quad f,g \in R[x,y]\}$
(I voortgebracht door x en y)

'$\supseteq$' $(Xf + Yg)(0,0) = 0$ dus $Xf + Yg \in I$ ✓

'$\subseteq$' $I = \{f \in R[x,y] : f(0,0)\} = 0$

$= \{\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} a_{ij} x^i y^j, \quad a_{00} = 0\}$

$= \{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{m} a_{ij} x^i y^j + \sum_{i=1}^{m} a_{i0} x^i\}$

$= \{\underbrace{Y \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{m} a_{ij} x^i y^{j-1}}_{\in R[x,y]} + \underbrace{x \sum_{i=1}^{m} a_{i0} x^{i-1}}_{\in R[x] \text{ dus } \subset R[x,y]}\} = \{Yk + Xl \quad k,l \in R[x,y]\}$

dus $I = \{xf + yg, \quad f,g \in R[x,y]\} = (x,y)$

~~R een domein, I priem ideaal ...~~
~~dus I is een maximaal ideaal~~

$1 \cdot x = 1x$ en $y = 1 \cdot y$ zijn priem in $R[x,y]$, dus (x,y) ?? 6,
is een priemideaal ~~...~~

$R[x,y]/(x,y) = R[x,y]/I$ ~~is een~~ als dit een lichaam is, is (x,y) maximaal ✓

$R[x,y]/(x,y) \cong R$ dit is een ring

er moet gelden $\forall\, a,b \in R \quad ab = ba$

$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (R = M(2,\mathbb{R})$ R is a domain in this exercise!

$ab = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ba = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$

dus iha is R geen lichaam (iha niet commutatief) dus (x,y) is iha niet maximaal
(voor $R = \mathbb{R}$ is (x,y) wel maximaal want $\mathbb{R}$ is een lichaam)

2.5/5

6a R een domein, $\forall a \in R$, $a \neq 0$ kan a geschreven worden als een product van een eenheid en een eindig aantal irreducibele factoren, die producten op volgorde na uniek and unit factors!

2/3

b $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

$f \in \mathbb{F}_2 \qquad \deg(f) \leq 3$

$f = a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$

als de nulpunten van f niet in $\mathbb{F}_2$ liggen, dan is f irreducibel dus $f(\bar{1}) \neq 0$ en $f(\bar{0}) \neq 0$

$f(\bar{0}) = a_0$

$f(\bar{1}) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0$

Dus $a_0 = \bar{1} \quad (\neq 0)$

$a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = \bar{1} \ (\neq 0)$ (dus of $a_0 = \bar{1}$ of a_0 en a_i en a_j zijn $\bar{1}$)

Dus de irreducibele polynomen zijn:

~~$f = \{a_0, a_0 + a_1 x + a_2 x^2, a_0 + a_1 x + a_2 x^2$~~

$f = \{\bar{1}$ unit, not irreducible $, \bar{1} + \bar{x} + \bar{x}^2, \bar{1} + \bar{x} + \bar{x}^3, \bar{1} + X^2 + X^3\}$

$x, 1+x$

2.5/5

4.5/8

2a $h, f, g \in R^V$

$\bullet$ $(0 + 0)(v) = a(v) + 0 = (0 + a)(v)$

$\bullet$ $(f+g)(v) = f(v) + g(v) = g(v) + f(v) = (g+f)(v)$

$\bullet$ $\forall f \in R^V \quad \exists -f \in f(v)$ zodat

$(f + -f)(v) = f(v) - f(v) = 0 = (-f + f)(v)$

$\bullet$ $((f+g)+h)(v) = (f+g)(v) + h(v) = f(v) + g(v) + h(v)$
$= f(v) + (g+h)(v) = (f + (g+h))(v)$

$*$ $\forall f, g, h \in R^V$

$(f(gh))(v) = f(v) \cdot (gh)(v) = f(v)\, g(v)\, h(v) = (fg)(v)\, h(v)$
$= ((fg)h)(v)$

$*$ $\exists g(v) = 1 \in R^V$ met $\quad (g \cdot f)(v) = f(v) = (f \cdot g)(v) = g(v) f(v) = 1 \cdot f(v)$
$= f(v) \cdot g(v) = f(v) \cdot 1$

$*$ $(f(g+h))(v) = f(v)\,(g+h)(v) = f(v)\, g(v) + f(v)\, h(v)$
$= (fg)(v) + (fh)(v)$

$((g+h)f)(v) = (g+h)(v)\, f(v) = g(v) f(v) + h(v) f(v)$
$= (gf)(v) + (hf)(v) \qquad \forall f, g, h \in R^V$

dus R^V is een ring

3/

b[a] $n=2$

$(1,0)\times(0,1) = (\cancel{0}\,1\cdot 0,\ 0\cdot 1) = (0,0)$

° $(1,0)$ en $(0,1)$ zijn niet 0 dus zijn nuldelers

voor $n = i \geq 2$

(*) $= \underbrace{(1,0,\dots,0)}_{i \text{ elementen}} \times (0,1,0,\dots,0) \times \dots \times (0,\dots,0,1)$ ← alle ~~..~~ ai on gelijk aan 0

$= (1\cdot 0\cdot 0 \dots 0,\ 0\cdot 1\cdot 0 \dots 0,\ \cancel{0\dots}\ \dots,\ 0\cdot\dots\cdot 0\cdot 1)$

$= (0,0,\dots,0)$ nulelement, dus R^v heeft

° ~~nulelementen~~ nuldelers

~~[illegible]~~ $(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$

~~[illegible]~~ overal 0 behalve op ~~[illegible]~~ de j^e plek

(*) $= \prod_{j=1}^{i} (0,0,\dots,0,\ \cancel{j}\,1,0,\dots,0)$ $j = 1,\dots,i$

$= (0,0,\dots,0)$ ↑ j^e plek

a

Dus voor $i \geq 2$ heeft R^v altijd nuldelers

2/2

~~[illegible]~~

c * $f(k) = 0\ \forall\ k \in [0,1]$

dus $0 \in C([0,1])$

* $f,g \in C([0,1])$

$f-g$ continu (f, g continu)

$f-g$ $[0,1] \to \mathbb{R}$ (f en g $[0,1] \to \mathbb{R}$)

dus $f-g \in C([0,1])$ $\forall f,g \in C([0,1])$

* $g,f \in C([0,1])$

fg continu (f, g continu)

fg $[0,1] \to \mathbb{R}$ (f en g $[0,1] \to \mathbb{R}$)

dus $fg \in C([0,1])$ $\forall f,g \in C([0,1])$

en dus is $C([0,1])$ een deelring van R^v

$V = [0,1]$ dus $n \geq 2$ ~~[illegible]~~ dus ~~[illegible]~~

$C([1,0])$ heeft nuldelers (zie b)

-2/4

$[0,1]$ does not have finitely many

4b $I_1 = (a_1, \ldots, a_n)$

$I_2 = (b_1, \ldots, b_m)$

$I_3 = (c_1, \ldots, c_e)$

$I_1 + I_3 = (a_1, \ldots, a_n) + (c_1, \ldots, c_e)$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{e} (a_i + c_j)$

$I_2 + I_3 = (b_1, \ldots, b_m) + (c_1, \ldots, c_e)$

$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{e} (b_i + c_j)$

$I_1 + I_3 = I_2 + I_3 = R$

$I_1 \cdot I_2 = (a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_m)$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i \cdot a_j)$

'⊆' Stel $d \in R$

dan: ~~of~~ ~~$a \in I_3$ of ($a \in I_2$ en $a \in I_1$)~~ This conclusion is not correct

- $d \in I_3$ ~~klaar~~ $\to d \in (I_1 \cdot I_2) + I_3$
- $d \notin I_3$ dan $d \in I_1$ $(I_1 + I_3 = R)$
  en $d \in I_2$ $(I_2 + I_3 = R)$

'⊆' dus $d \in I_1 \cdot I_2$ dus $d \in (I_1 \cdot I_2) + I_3 \; \forall d \in R$

'⊇' ~~Stel $a \in (I_1 \cdot I_2) + I_3 \to R$~~

$(I_1 \cdot I_2) + I_3 \overset{\subseteq}{=} (I_1 + I_3) \cdot (I_2 + I_3) = R \cdot R = R$ (✓)

dus $(I_1 \cdot I_2) + I_3 = R$

2/4

c $I_1 + I_k = R$
$I_2 + I_k = R$
$I_3 + I_k = R$
$\vdots$
$I_{k-1} + I_k = R$

$\to (I_1 \cdot I_2) + I_k = R$ (zie a) (*)
$I_3 + I_k = R$

$\to (I_1 \cdot I_2 \cdot I_3) + R \longrightarrow$ nog $k-4$ keer herhalen

dit levert $(I_1 \cdot I_2 \cdot \ldots \cdot I_{k-1}) + I_k = R$ ✓

(*): iha geldt: $I_i \cdot I_j = I_k$ met I_i, I_j, I_k idealen

③

Tentamen Algebraische Structuren 6 apr '10

4^c

$$R/\left(\prod_{i=1}^{t} I_i\right) = R/\left(I_t \cdot \prod_{i=1}^{t-1} I_i\right) \overset{\text{chinese reststelling}}{\cong} R/I_t \times R/\prod_{i=1}^{t-1} I_i$$

$$\cong R/I_t \times R/\left(I_{t-1} \cdot \prod_{i=1}^{t-2} I_i\right) \overset{\text{chinese reststelling}}{\cong} R/I_t \times R/I_{t-1} \times R/\prod_{i=1}^{t-2} I_i$$

$$\cong \ldots \cong R/I_t \times R/I_{t-1} \times \ldots \times R/I_2 \times R/I_1 = \prod_{i=1}^{t} (R/I_i)$$

$t-3$x herhaald

7/7

11.5/14

1^b ⓐ $eg = ge$ ~~want~~

$$eg = eg\cancel{fe}1 \overset{fe=1}{=} egfe \overset{fe\in S, f\in S}{=} efge = 1\cdot ge = ge \quad \cancel{\text{dus}},$$

right idea

1^b ⓑ $\forall e \in R$

$ed = 1\cdot ed = dc\,ed = decd = de\cdot 1 = de$

dus $d \in S$

1	2	3	4	5	6		total:	
5	7	10	11.5	4	4.5	+6	48	≙ 77 %

mark: 7.5

12/04/10